第 3 节 直线相关的对称问题（★★☆）

内容提要

1．点关于直线对称：如图 1，欲求点 A 关于直线 l 的对称点 A'，可设 $A'(a,b)$，用 $AA'\perp l$ 和 AA' 的中点在直线 l 上来建立方程组求解 a 和 b.

特殊情况：当 l 的斜率是 ±1 时，可直接由 l 的方程分别将 x，y 反解出来，再将点 A 的坐标分别代入即可求得 A' 的坐标.

2．圆关于直线对称：如图 2，圆 C 和圆 C' 关于直线 l 对称，则 C 和 C' 关于直线 l 对称，且两圆半径相等.

3．直线与直线对称：如图 3，求直线 a 关于直线 l 的对称直线 a'，可抓住两点：

①所求直线 a' 经过直线 a 和直线 l 的交点 P；

②在直线 l 上另取一点 Q，根据点 Q 到直线 a 和 a' 的距离相等建立方程求解 a' 的斜率.

特别地，如图 4 和图 5，若 l 是水平线或竖直线，则 a 和 a' 的倾斜角互补，斜率相反.

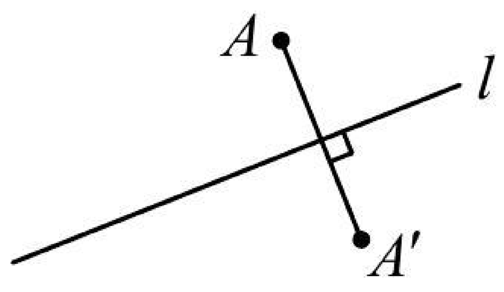


图1

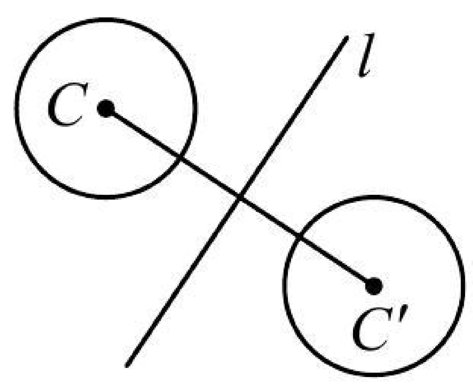


图2

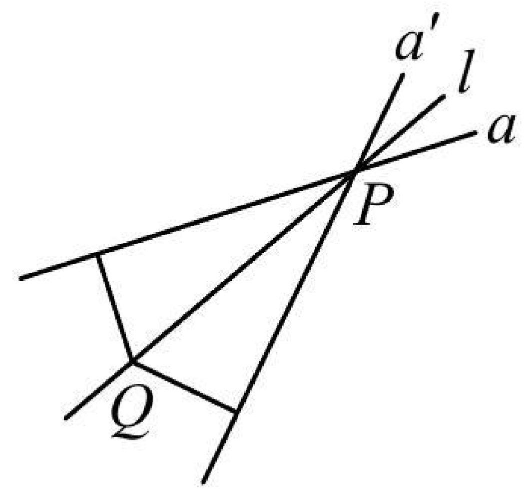


图3

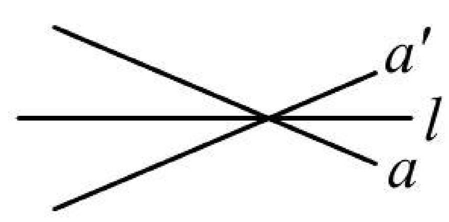


图4

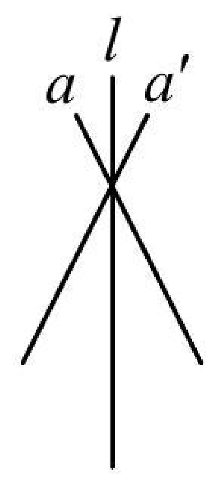


图5

典型例题

类型Ⅰ：点与线的对称

【例 1】点 $A(1,2)$ 关于直线 $l:x+y-2=0$ 的对称点是（　　）

（A）$(1,0)$　　（B）$(0,1)$　　（C）$(0,-1)$　　（D）$(2,1)$

解法 1：求点 A 关于直线 l 对称点 A'，抓住 AA' 的中点在 l 上和 $AA'\perp l$ 建立方程组即可，

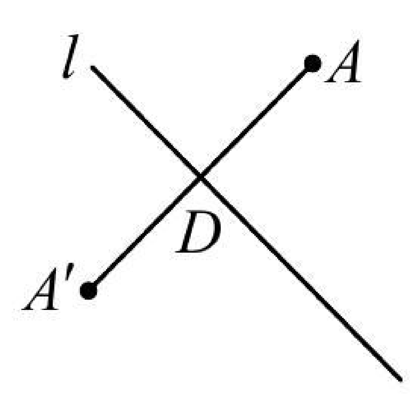
设 A 关于 l 的对称点是 $A'(a,b)$，则 AA' 的中点为 $D(\dfrac{a+1}{2},\dfrac{b+2}{2})$，如图，

应有 $\begin{cases}\dfrac{a+1}{2}+\dfrac{b+2}{2}-2=0\text{(中点在}l\text{上)}\\ \dfrac{b-2}{a-1}\times(-1)=-1\,(AA'\perp l)\end{cases}$，解得：$\begin{cases}a=0\\ b=1\end{cases}$，所以 $A'(0,1)$.

解法 2：注意到对称轴的斜率为 -1，故可按内容提要中的特殊情况来处理，先由对称轴方程反解 x 和 y，

$x+y-2=0\Rightarrow\begin{cases}x=2-y\\ y=2-x\end{cases}$，将 $A(1,2)$ 分别代入此二式的右侧可得 $\begin{cases}x=2-2=0\\ y=2-1=1\end{cases}$，故所求对称点为 $(0,1)$.

答案：B



【反思】①求点 A 关于直线 l 的对称点 A'，关键是抓住 AA' 的中点在 l 上和 $l\perp AA'$ 来建立方程组，这是解决这类问题的通法；②解法 2 的做法，只适用于对称轴的斜率为 ±1 的情形.

【变式】已知直线 $l:x+3y-2=0$，则直线 l 关于点 $A(1,1)$ 对称的直线 l' 的方程为_____.

解法 1：如图，关于点对称的两直线平行，所以两直线斜率相等，再找一个点即可，

由题意，点 $B(2,0)$ 在 l 上，那么它关于点 A 的对称点 $B'(0,2)$ 在 l' 上，

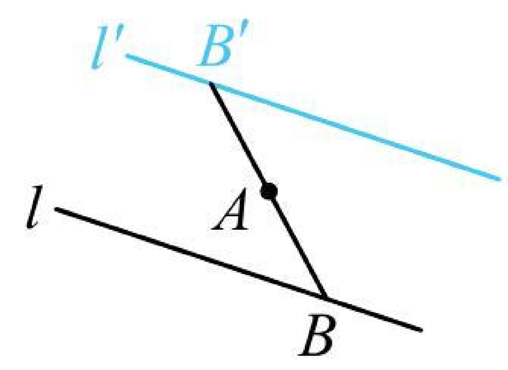
又直线 l 的斜率为 $-\dfrac{1}{3}$，所以 l' 的方程为 $y=-\dfrac{1}{3}x+2$，整理得：$x+3y-6=0$.

解法 2：要求直线 l'，可设其上任意一点 B' 的坐标，由 B' 关于 A 的对称点 B 在 l 上建立该坐标的方程，

设 $B'(x,y)$ 是 l' 上任意一点，则它关于 A 的对称点 $B(2-x,2-y)$ 在直线 l 上，

代入直线 l 的方程可得 $(2-x)+3(2-y)-2=0$，整理得：$x+3y-6=0$，即 $l':x+3y-6=0$.

答案：$x+3y-6=0$



类型Ⅱ：圆关于直线的对称

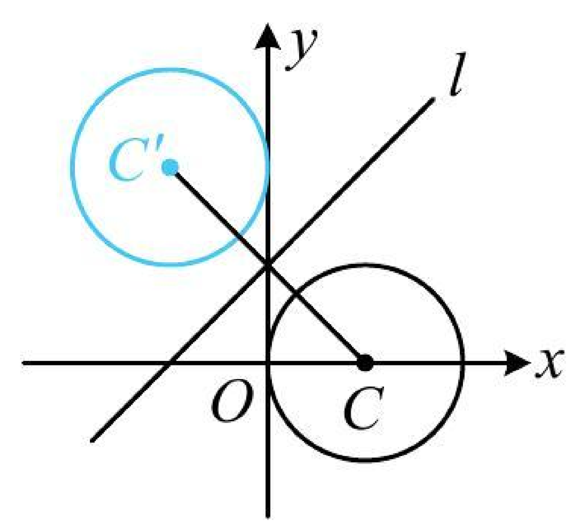
【例 2】与圆 $C:(x-1)^2+y^2=1$ 关于直线 $l:x-y+1=0$ 对称的圆的方程为_____.

解析：如图，对称圆的圆心 C' 与点 C 关于 l 对称，先求 C' 的坐标，l 的斜率为 1，可按特殊情况处理，

$x-y+1=0\Rightarrow\begin{cases}x=y-1\\y=x+1\end{cases}$，将 $C(1,0)$ 代入此二式右侧可得 $\begin{cases}x=0-1=-1\\y=1+1=2\end{cases}$，所以 $C'(-1,2)$，

故所求圆的方程为 $(x+1)^2+(y-2)^2=1$.

答案：$(x+1)^2+(y-2)^2=1$



【反思】求圆 C 关于直线 l 的对称圆 C'，关键是求点 C 关于直线 l 的对称点 C'，两圆半径相等.

【变式】若方程 $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0(D^2+E^2-4F>0)$ 表示的曲线关于直线 $y=x$ 对称，则必有（　　）

（A）$D=E$　　（B）$D=F$　　（C）$E=F$　　（D）$D=E=F$

解析：$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0\Rightarrow(x+\dfrac{D}{2})^2+(y+\dfrac{E}{2})^2=\dfrac{D^2+E^2-4F}{4}$，

所以题干的方程表示圆心为$(-\dfrac{D}{2},-\dfrac{E}{2})$的圆，

圆关于直线对称，只需该直线过圆心，所以$-\dfrac{E}{2}=-\dfrac{D}{2}$，故$D=E$.

答案：A

类型III：直线与直线对称

【例 3】直线$l_1:x+y-1=0$关于直线$l:3x-y-3=0$对称的直线l_2的方程为_____.

解析：如图，直线l_2过l_1与l的交点P，先求点P，$\begin{cases}x+y-1=0\\3x-y-3=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=1\\y=0\end{cases}$，所以$P(1,0)$，

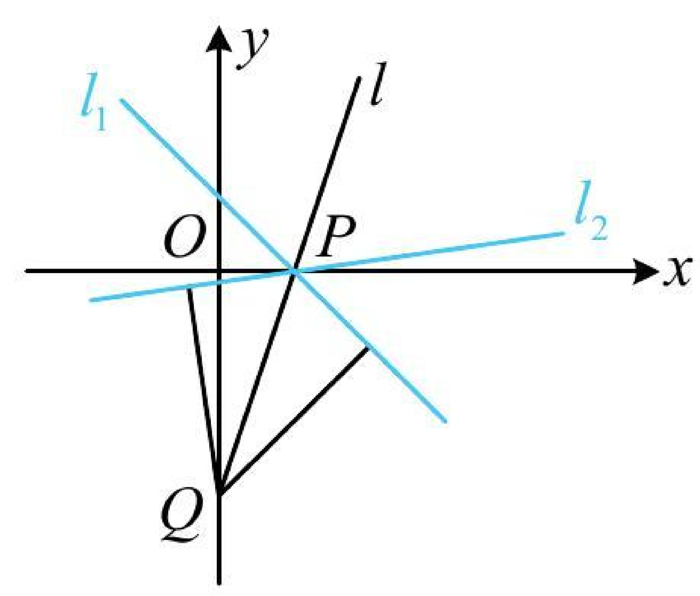
有了点，还差斜率，故设斜率，并在l上另取一点Q，由Q到l_1和l_2距离相等建立方程求斜率，

由图可知l_2的斜率存在，设为k，则l_2的方程为$y=k(x-1)$，即$kx-y-k=0$ ①，

在l上另取一点$Q(0,-3)$，则Q到l_1和l_2的距离相等，即$\dfrac{|-3-1|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\dfrac{|-(-3)-k|}{\sqrt{k^2+(-1)^2}}$，解得：$k=\dfrac{1}{7}$或$-1$，

其中-1是l_1的斜率，舍去，所以$k=\dfrac{1}{7}$，代入①整理得l_2的方程为$x-7y-1=0$.

答案：$x-7y-1=0$



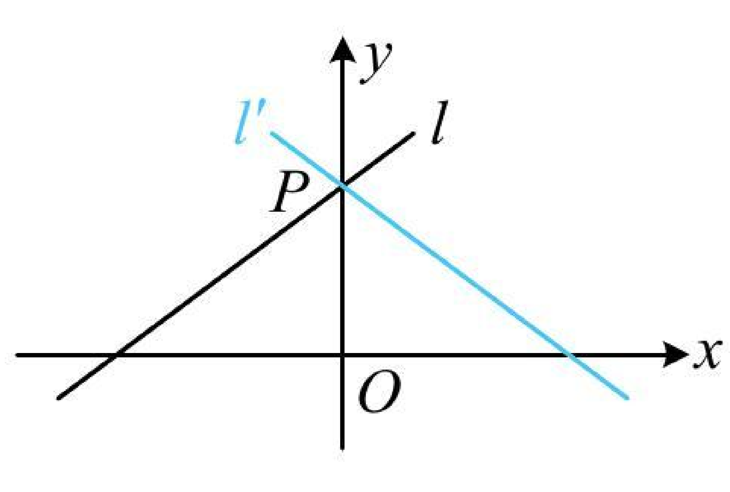
【变式 1】直线$l:3x-4y+5=0$关于y轴对称的直线l'的方程为_____.

解析：如图，直线l'经过l与y轴的交点P，先求P的坐标，$\begin{cases}3x-4y+5=0\\x=0\end{cases}\Rightarrow y=\dfrac{5}{4}$，所以$P(0,\dfrac{5}{4})$，

由图可知两直线的倾斜角互补，其斜率应互为相反数，直线l的斜率为$\dfrac{3}{4}$，所以直线l'的斜率为$-\dfrac{3}{4}$，

故直线l'的方程为$y=-\dfrac{3}{4}x+\dfrac{5}{4}$，整理得：$3x+4y-5=0$.

答案：$3x+4y-5=0$



【变式 2】（2022·新高考Ⅱ卷）设点 $A(-2,3)$，$B(0,a)$，直线 AB 关于直线 $y=a$ 的对称直线为 l，已知直线 l 与圆 $C:(x+3)^2+(y+2)^2=1$ 有公共点，则 a 的取值范围为_____.

解析： $y=a$ 是水平线，关于水平线对称的两直线倾斜角互补，斜率相反，所以直线 l 的方程易求出，

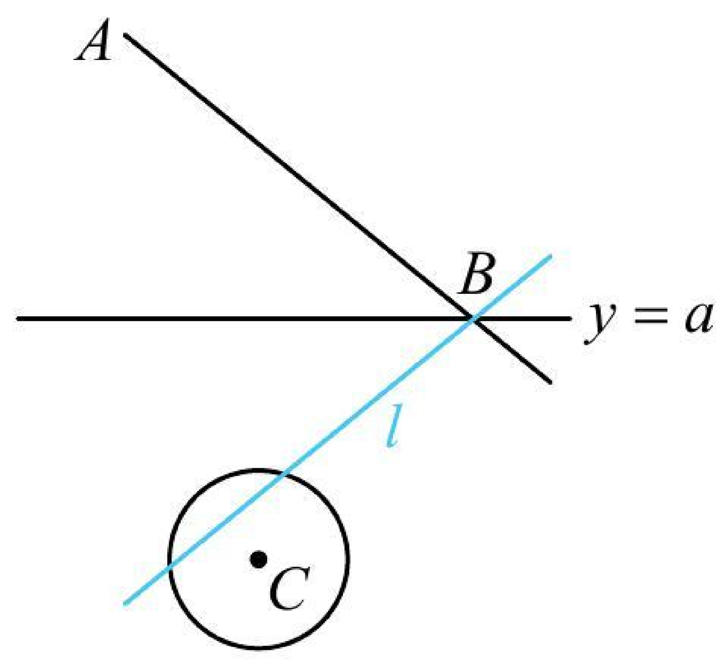
如图，注意到点 B 在直线 $y=a$ 上，所以直线 l 也过点 B，

因为 $k_{AB}=\dfrac{3-a}{-2-0}=\dfrac{a-3}{2}$，所以 l 的斜率为 $\dfrac{3-a}{2}$，故 l 的方程为 $y=\dfrac{3-a}{2}x+a$，即 $(3-a)x-2y+2a=0$，

再翻译直线 l 与圆 C 有公共点，即可求得 a 的范围，

因为 l 与圆 C 有公共点，所以圆心 $C(-3,-2)$ 到 l 的距离 $d=\dfrac{|(3-a)\times(-3)-2\times(-2)+2a|}{\sqrt{(3-a)^2+4}}\le 1$，解得：$\dfrac{1}{3}\le a\le\dfrac{3}{2}$.

答案： $[\dfrac{1}{3},\dfrac{3}{2}]$



【总结】从例 3 及其后的两个变式可以看出，当对称轴不与坐标轴垂直时，可在对称轴上另取一点，由该点到两直线距离相等来求斜率；当对称轴与坐标轴垂直时，直接由两直线斜率相反即可求斜率.

类型Ⅳ：线段和与差的最值

【例 4】在平面直角坐标系 xOy 中，直线 $l:x+y+1=0$ 上的动点 P 到定点 $M(0,2)$ 和 $N(1,1)$ 的距离之和的最小值为_____.

解析： M，N 在 l 的同侧，直接分析 $|PM|+|PN|$ 的最值不易，可将 M 对称到 l 的另一侧，转化为求 l 上的动点到其两侧定点的距离之和的最小值来分析，

如图，设 M' 是 M 关于直线 l 的对称点，则 $|PM|=|PM'|$，所以 $|PM|+|PN|=|PM'|+|PN|$，

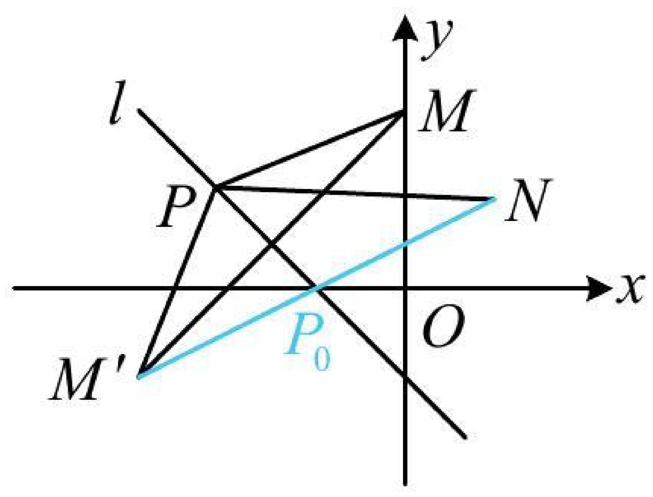
由三角形两边之和大于第三边可得 $|PM'|+|PN|\ge|M'N|$，当且仅当 P 与图中 P_0 重合时取等号，

所以 $|PM|+|PN|$ 的最小值是 $|M'N|$，下面先求点 M' 的坐标，注意到 l 的斜率为 -1，可按特殊情况处理，

$x+y+1=0\Rightarrow\begin{cases}x=-y-1\\y=-x-1\end{cases}$，将点 $M(0,2)$ 代入此二式的右侧可得 $\begin{cases}x=-2-1=-3\\y=-0-1=-1\end{cases}$，所以 $M'(-3,-1)$，

故 $|M'N|=\sqrt{(-3-1)^2+(-1-1)^2}=2\sqrt{5}$，即 $(|PM|+|PN|)_{\min}=2\sqrt{5}$.

答案： $2\sqrt{5}$



【反思】定直线 l 上的动点 P 到其同侧两定点 M，N 的距离之和的最小值，可通过将 M 或 N 对称到 l 的另一侧，借助三角形两边之和大于第三边来分析.

【变式】直线 $2x+3y-6=0$ 分别交 x 轴和 y 轴于点 A，B，P 为直线 $l: y=x$ 上一动点，则 $|PA|-|PB|$ 的最大值是（　　）

（A）1　（B）2　（C）3　（D）4

解析：由题意，直线 $2x+3y-6=0$ 与 x 轴交于点 $A(3,0)$，与 y 轴交于点 $B(0,2)$，

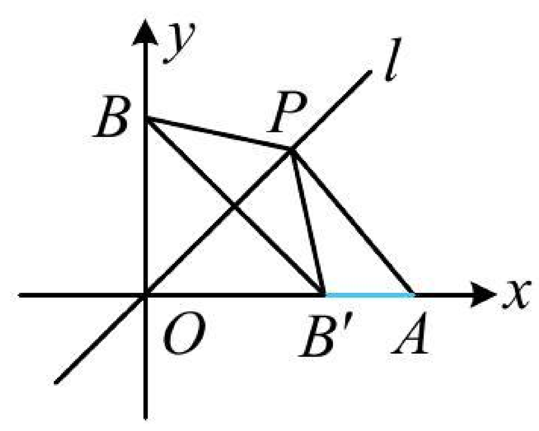
如图，A，B 在 l 的两侧，直接分析 $|PA|-|PB|$ 的最大值不易，可将 B 对称到 l 的另一侧，

设 B' 是 B 关于直线 l 的对称点，则 $B'(2,0)$，且 $|PB|=|PB'|$，所以 $|PA|-|PB|=|PA|-|PB'|$，

由三角形两边之差小于第三边可得 $|PA|-|PB'|\le|AB'|$，当且仅当点 P 与点 O 重合时取等号，

所以 $(|PA|-|PB|)_{\max}=|AB'|=1$.

答案：A



【反思】定直线 l 上的动点 P 到其异侧两定点 A，B 的距离之差的最大值，可通过将 A 或 B 对称到 l 的另一侧，借助三角形两边之差小于第三边来分析.

类型Ⅴ：入射光线与反射光线的对称

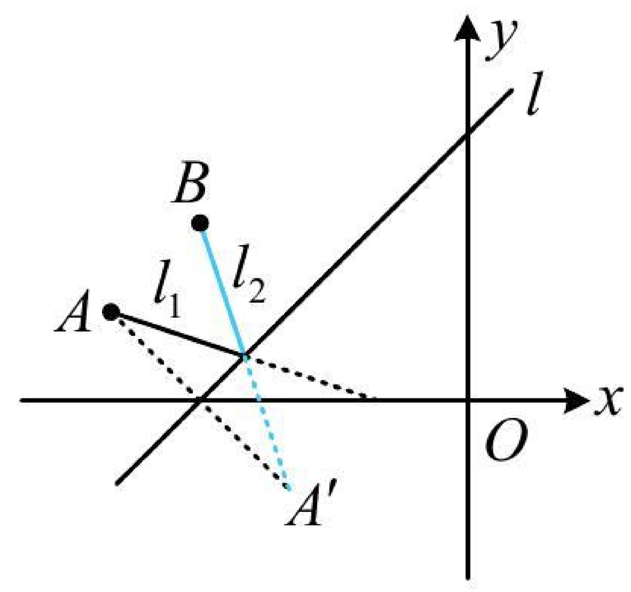
【例 5】从点 $A(-4,1)$ 发出的一束光线 l_1 经过直线 $l: x-y+3=0$ 反射，反射光线 l_2 恰好通过点 $B(-3,2)$，则 l_2 的方程为_____.

解析：如图，l_1 和 l_2 关于 l 对称，所以 A 关于 l 的对称点 A' 在 l_2 上，先求 A' 的坐标，l 的斜率为 1，可按特殊情况处理，$x-y+3=0\Rightarrow\begin{cases}x=y-3\\y=x+3\end{cases}$，将点 $A(-4,1)$ 代入此二式的右侧可得 $\begin{cases}x=1-3=-2\\y=-4+3=-1\end{cases}$，

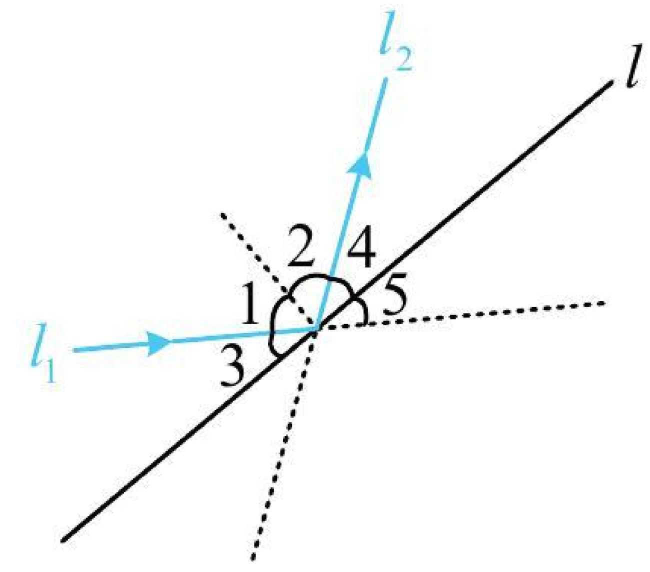
所以 $A'(-2,-1)$，直线 l_2 即为直线 $A'B$，其斜率为 $\dfrac{-1-2}{-2-(-3)}=-3$，

故 l_2 的方程为 $y-2=-3[x-(-3)]$，整理得：$3x+y+7=0$.

答案：$3x+y+7=0$



【反思】如图，$\angle 1=\angle 2 \Rightarrow \angle 3=\angle 4$，又$\angle 3=\angle 5$，所以$\angle 4=\angle 5$，从而入射光线$l_1$与反射光线$l_2$关于直线$l$对称，利用此性质可解决大部分的光线入射与反射问题，其本质仍是点关于线的对称.



强化训练

1．（2022・河南南阳模拟・★）点 $A(1,2)$ 关于直线 $l:4x+2y-13=0$ 的对称点为_____.

2．（2022・北京模拟・★）直线 $l:3x-4y+5=0$ 关于点 $A(1,1)$ 对称的直线 l' 的方程为_____.

3．（★）已知圆 $C:x^2+y^2+ax+by+1=0$ 关于直线 $l:x+y=1$ 对称的圆为 $O:x^2+y^2=1$，则 $a+b=$（　　）

（A）-2　　（B）± 2　　（C）-4　　（D）± 4

4．（★）已知圆 $C:x^2+y^2-2x+4y=0$ 关于直线 $l:2x+ay=0$ 对称，则 $a=$_____.

5．（★）直线 $l:x-y+1=0$ 关于 x 轴对称的直线 l' 的方程是（　　）

（A）$x+y-1=0$　　（B）$x-y+1=0$　　（C）$x+y+1=0$　　（D）$x-y-1=0$

6．（★★）直线 $l_1:x-3y+3=0$ 关于 $l:x+y-1=0$ 的对称直线 l_2 的方程为_____.

7．（2023·重庆模拟·★★★）从点$P(-2,1)$发出的光线经x轴反射后，到达圆$C:(x-1)^2+(y-3)^2=1$上的点A，则光线从P到A的最短路程为（　　）

（A）3　（B）4　（C）5　（D）6

8．（2022·黑龙江勃利模拟·★★★）设$P(x,y)$为直线$l:x-y=0$上的动点，则$m=\sqrt{(x-2)^2+(y-4)^2}+\sqrt{(x+2)^2+(y-1)^2}$的最小值为（　　）

（A）5　（B）6　（C）$\sqrt{37}$　（D）$\sqrt{39}$

9．（2022·安徽模拟·★★★）已知点R在直线$l:x-y+1=0$上，$M(1,3)$，$N(3,-1)$，则$||RM|-|RN||$的最大值为（　　）

（A）$\sqrt{5}$　（B）$\sqrt{7}$　（C）$\sqrt{10}$　（D）$2\sqrt{5}$